

Logique, calcul algébrique dans $\mathbb{R}$

Durée : **2h**. Calculatrices non autorisées. La **clarté** de la copie fera varier la note de ± 1 point.
 Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené à prendre.
 Les questions simples, ou avec une méthode classique et connue, doivent être traitées rapidement, sans perdre de temps au brouillon !

Exercice 1 – Autour de la suite de Fibonacci

On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, & u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

On peut facilement vérifier que tous les termes de cette suite sont positifs : on pourra utiliser ce résultat sans le démontrer sur la copie.

- 1) Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5 .
- 2) Montrer par récurrence simple que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$3u_n \leq 2u_{n+1} \leq 4u_n$$

- 3) On considère la suite de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$. Pour alléger

l'écriture des calculs, on pose $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

- a) Calculer v_0 et v_1 .
- b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 \geq 0$.
- c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $v_{n+2} - v_{n+1} - v_n = 0$.
- d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n$.

Exercice 2 – Quelques équations

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$|-2x^2 - x + 6| = 4x - 1$$

- 2) Montrer que pour tout réel x :

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor = \lfloor 3x \rfloor$$

Exercice 3 – Une équation fonctionnelle

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$(E) : \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy - 1$$

Exercice 4 – Une inéquation à paramètre

Résoudre dans $\mathbb{R}$ en discutant selon le paramètre m :

$$\sqrt{mx + 1} \geq x$$

On pourra discuter selon les cas $m = 0$, $m > 0$ et $m < 0$.

Exercice 5 – La conjecture de Caramel

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{5}{2}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = 2^{\frac{1}{3} \times (2^n - (-1)^n)}$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\lfloor u_n \rfloor = a_n$$

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier $2^n - (-1)^n$ est un multiple de 3. *On ne pourra pas utiliser la formule de factorisation de $a^n - b^n$.*
- 2) Calculer les valeurs de a_1 , a_2 , a_3 ainsi que u_2 et u_3 .
- 3) Caramel, qui étudie en MPSI, a utilisé la question précédente pour *conjecturer* que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = a_n + \frac{1}{a_n}$$

En supposant cette conjecture vérifiée, montrer que $\lfloor u_n \rfloor = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- 4) Terminer la preuve en vérifiant la conjecture de Caramel.

Blague — un matheux lors d'un entretien d'embauche :

- Quelle est votre principale qualité ?
- Je suis très rapide en calcul mental.
- 23×547 ?
- 56
- Mais c'est faux !
- Oui mais c'est rapide !